

微积分下载作业答案

一、计算题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6}$.

解： $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+2} = \frac{4}{5}$

2. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$.

解： $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

3. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$.

解： $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{5}{4}$

4. 设 $y = x\sqrt{x} + \sin 4x$, 求 dy .

解： $y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' + (\sin 4x)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \cos 4x(4x)' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 4\cos 4x$

$$dy = y'dx = \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + 4\cos 4x \right) dx$$

5. 设 $y = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, 求 dy .

$$\begin{aligned} \text{解: } y' &= [\ln(x+1)]' - \left(\frac{x}{x+1} \right)' \\ &= \frac{1}{x+1} (x+1)' - \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$dy = y'dx = \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

6. 设 $y = e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$, 求 dy .

$$\text{解: } y' = (e^{\sqrt{x}})' + \left(\frac{1}{x} \right)' = e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' - \frac{1}{x^2} = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

$$dy = y'dx = \left(\frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

7. 计算不定积分 $\int x \sin 2x dx$

$$\begin{aligned}\text{解: } \int x \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} \int x d\cos 2x = -\frac{1}{2} \left(x \cos 2x - \int \cos 2x dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(x \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C\end{aligned}$$

8. 计算不定积分 $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

$$\text{解: } \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

9. 计算不定积分 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$$\text{解: } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} d\sqrt{x} = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

10. 计算定积分 $\int_0^1 2xe^x dx$

$$\text{解: } \int_0^1 2xe^x dx = 2 \int_0^1 xde^x = 2 \left(xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) = 2 \left(e - e^x \Big|_0^1 \right) = 2[e - (e - 1)] = 2$$

11. 计算定积分 $\int_1^e \ln x dx$.

$$\text{解: } \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x d \ln x = e - \int_1^e 1 dx = e - x \Big|_1^e = 1$$

12. 计算定积分 $\int_0^\pi x \cos x dx$.

$$\text{解: } \int_0^\pi x \cos x dx = \int_0^\pi x d \sin x = x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \cos x \Big|_0^\pi = -2$$

二、应用题（每小题 10 分，共 40 分）

1. 欲做一个底为正方形，容积为 108 立方米的长方体开口容器，怎样做法用料最省？

$$\text{解: 设长方体底边边长为 } x, \text{ 高为 } h = \frac{108}{x^2}$$

$$\text{表面积 } y = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$$

$$y' = 2x - \frac{432}{x^2}$$

$$\text{令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 6 \text{ (唯一驻点)}$$

由实际问题知，当底边长为 6，高为 $\frac{108}{6^2} = 3$ 时，用料最省.

2. 欲用围墙围成面积为 216 平方米的一块矩形的土地，并在正中用一堵墙将其隔成两块，问这块土地的长和宽选取多大尺寸，才能使所用建筑材料最省？

$$\text{解: 设土地一边为 } x, \text{ 另一边为 } \frac{216}{x},$$

$$\text{围墙长度为 } y = 3x + 2 \frac{216}{x} = 3x + \frac{432}{x}$$

$$y' = 3 - \frac{432}{x^2}$$

$$\text{令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -12 \text{ (舍)}, x = 12 \text{ (唯一驻点)}$$

由实际问题知，当土地三堵墙的一边为 12 米，另一边为 18 米时，用料最省.

3. 用钢板焊接一个容积为 4 立方米的底为正方形的无盖水箱，已知钢板每平方米 10 元，焊接费 40 元，问水箱的尺寸如何选择，可使总费最低？最低总费是多少？

$$\text{解: 设水箱的底边长为 } x, \text{ 则有高 } h = \frac{4}{x^2}$$

$$\text{表面积 } y = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{16}{x}$$

$$y' = 2x - \frac{16}{x^2}$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 2$ (唯一驻点)

由实际问题知, 当底边长为 2 米, 高为 1 米时表面积最小, 费用最低

此时最低费用为 $y(2) \times 10 + 40 = 160$ (元) .

4. 某制罐厂要生产一种体积为 V 的有盖圆柱形容器, 问容器的底半径与高各为多少时可使用料最省?

解: 设底半径为 x , 则高为 $\frac{V}{\pi x^2}$

$$\text{表面积 } y = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

$$y' = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}$$

令 $y' = 0$ 可得 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ (唯一驻点)

由实际问题知, 当半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 高为 $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ 时用料最省.